5-4 频域稳定裕度

在稳定性研究中，称（-1，j0）点为临界点，而曲线Γ_{GH}相对于临界点的位置即偏离临界点的程度，反映系统的相对稳定性。

频域的相对稳定性即稳定裕度常用相角裕度γ和幅值裕度h来度量。

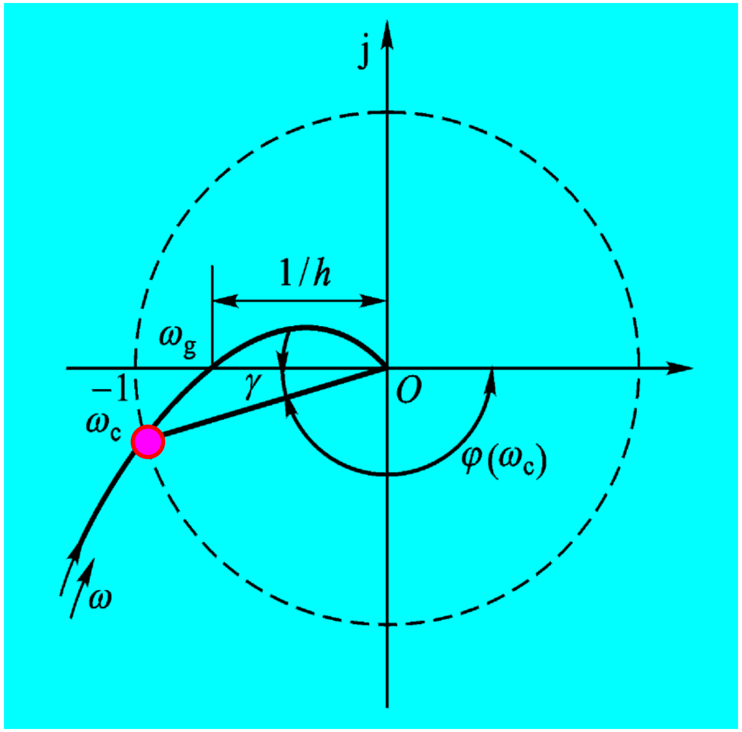
1. 相角裕度 γ /相位裕量/相余量

相角裕度是指$G_k(j\omega)$与(-1,j0)具有相同的幅值时，二者的相角之差，常用γ表示。

如右图所示：

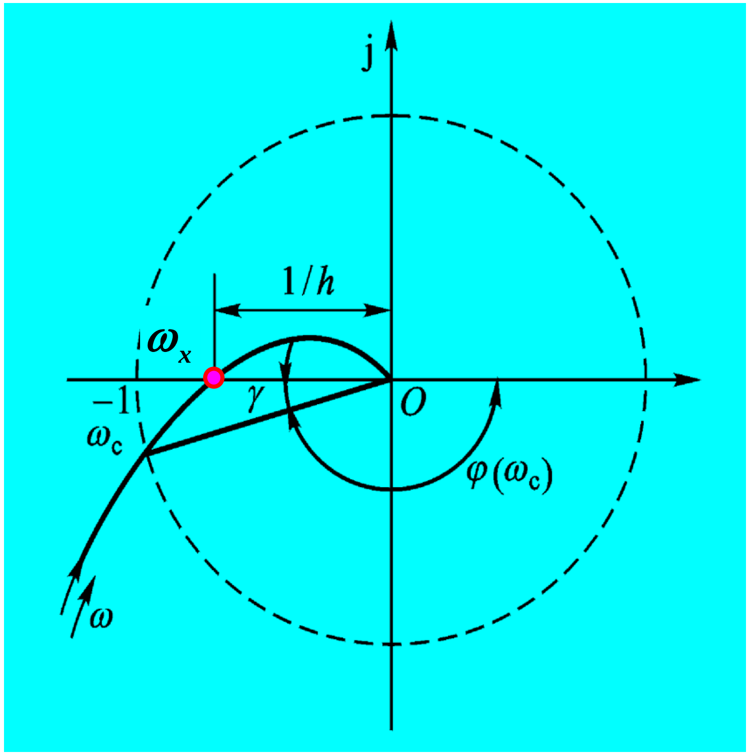
$$A(\omega_c)=1$$

$$\gamma=\varphi(\omega_c)-(-180^\circ)=180^\circ+\varphi(\omega_c)>0$$



相位裕度的物理含义：闭环稳定系统如果开环相频特性再滞后γ度，则系统处于临界稳定状态。

2. 幅值裕度h/幅值裕量



当$G_k(j\omega)$与(-1,j0)点具有相同的相角时，二者的幅值之比即为幅值裕度，常用h表示。

$\varphi(\omega_x)=-180°$，则幅值裕度为：

$$h=\frac{1}{A(\omega_x)}$$

幅值裕度h的物理含义：闭环稳定系统如果开环幅频特性再增大h倍，则闭环进入临界稳定状态。

幅值裕度h常用分贝值来表示：

$$L_h = 20\lg h = 20\lg \frac{1}{A(\omega_x)} = -20\lg A(\omega_x)$$

$$= -L(\omega_x)\ \ (dB)$$

当Γ_{GH}曲线与负实轴至多只有一个交点，且开环传递函数无s右半平面极点时，闭环系统稳定的条件是： $\gamma>0, h>1$或$L_h>0$。对于非最小相位系统，该结论不可靠。此外，仅用相角裕度或幅值裕度，都不足以反映系统的稳定程度。

参见P200例5-12上方。

- 例5-12 典型二阶系统（单位反馈）开环传递函数为
- 试确定系统的相角裕度γ。

$$G(s)=\frac{\omega_n^2}{s(s+2\zeta\omega_n)}$$

解：开环频率特性为

$$G(j\omega)=\frac{\omega_n^2}{j\omega(j\omega+2\zeta\omega_n)}$$

$$=\frac{\omega_n^2}{\omega\sqrt{\omega^2+(2\zeta\omega_n)^2}}\angle-90^\circ-tg^{-1}\frac{\omega}{2\zeta\omega_n}$$

$$令A(\omega)=1\Rightarrow\omega_c=\omega_n\sqrt{\sqrt{4\zeta^4+1}-2\zeta^2}$$

$$\omega_c = \omega_n \sqrt{\sqrt{4\zeta^4+1}-2\zeta^2}$$

按相角裕度的定义

$$\gamma = 180^\circ + \varphi(\omega_c)$$

$$\gamma = tg^{-1}\frac{2\zeta}{\sqrt{\sqrt{4\zeta^4+1}-2\zeta^2}}$$

$\zeta\uparrow \rightarrow \gamma\uparrow$

$\gamma\uparrow \rightarrow \sigma\%\downarrow$

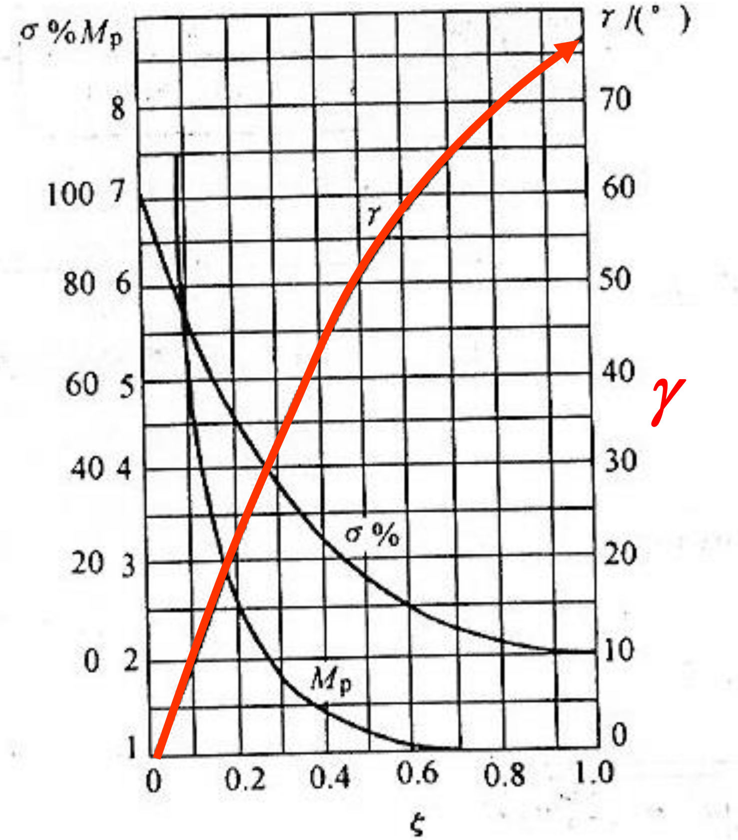
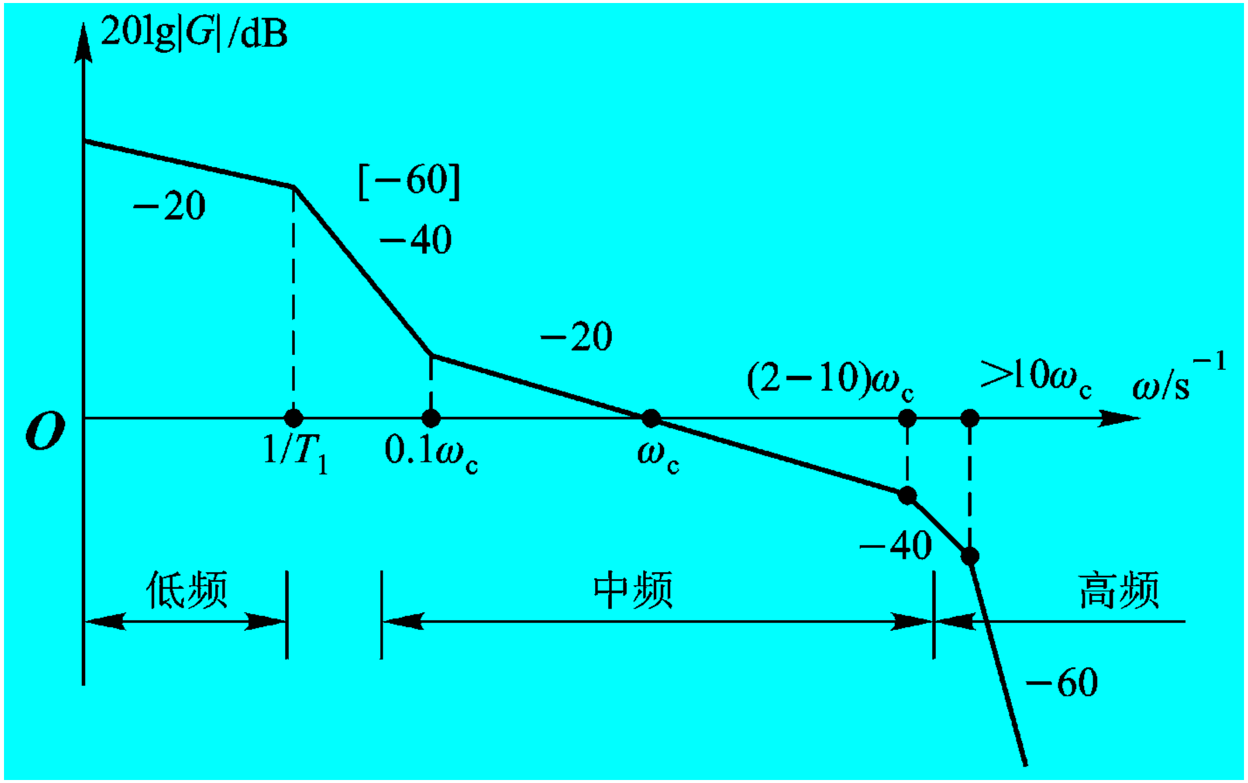


图 5-85 二阶系统 σ%、M_p、γ 与ζ 的关系曲线

对于高阶系统，通过$L_a(w)=0$求w_c，再由相频特性求γ。

补充：系统开环频率特性三频段的概念



三频段：低频、中频和高频没有严格的划分标准。

一、低频段与系统稳态精度有关

低频段的特性完全由积分环节和开环增益（比例环节）决定。

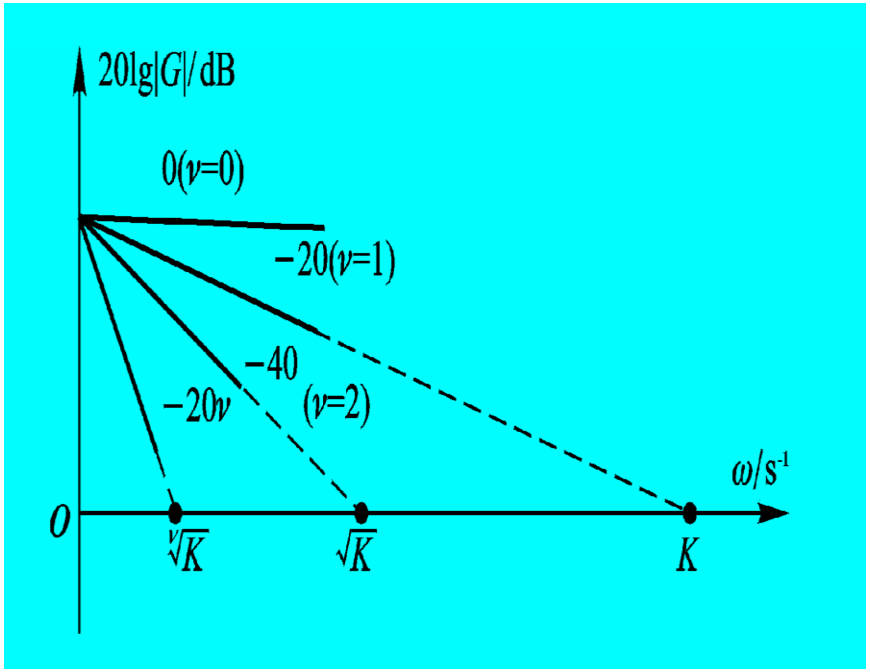
$$G_k(j\omega)\Big|_{\omega\to 0}=\frac{K}{(j\omega)^v}$$

$$L(\omega)=20\lg\frac{K}{(\omega)^v}$$

$(1, 20\lg K)$

$[-20v]$

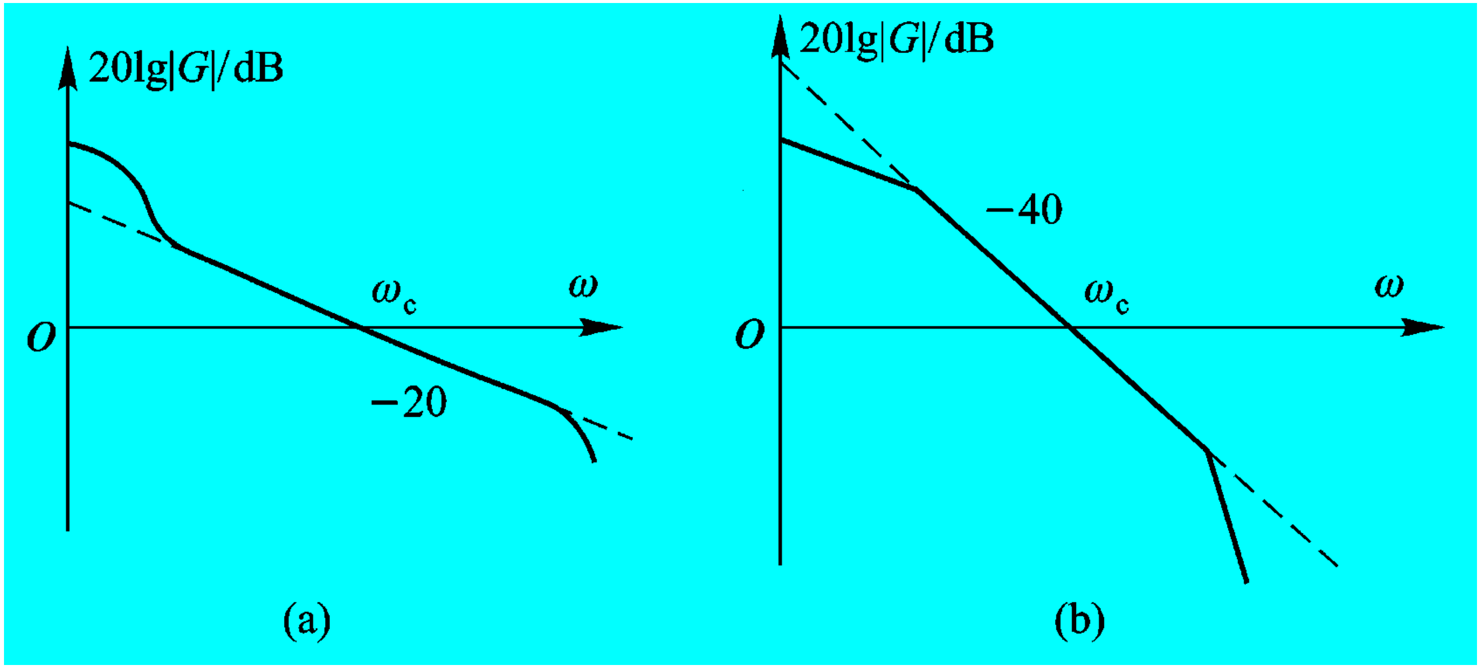
$(\omega^v=K, 0)$



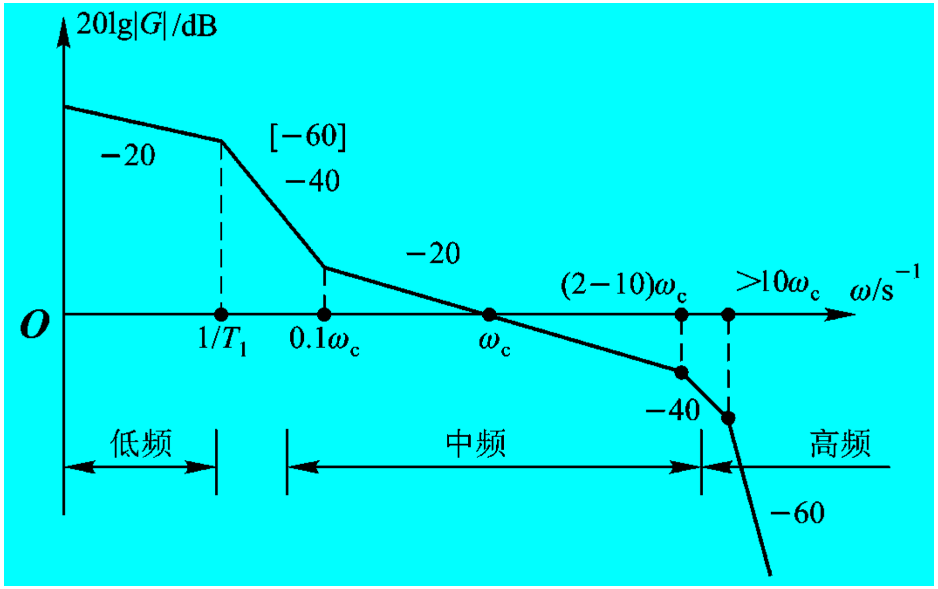
二、中频段与系统动态品质有关

中频段是指系统开环L(ω)曲线在截止频率ω_c附近的区段。

中频段的斜率和宽度集中反映了闭环系统的动态品质。



三、高频段与系统抗干扰能力有关



高频段：ω→∞,
L(ω)<<0即$|G_k(j\omega)|<<1$,
则

$$|\Phi(j\omega)| = \frac{|G_k(j\omega)|}{|1+G_k(j\omega)|} \approx |G_k(j\omega)|$$

高频段的幅值，直接反映了系统对输入高频干扰信号的抑制能力。

综上所述，我们希望有如下的开环L(ω)曲线：

- (1) 低频段应具有[-20]或[-40]的斜率，且分贝数较高。

  （目的：保证系统的稳态精度）

- (2)中频段斜率应为[-20] ，且具有一定的宽度。

  （目的：γ大，平稳性好。）

- (3)截止频率ω_c应尽可能高。

  （目的：提高系统的快速性）

- (4) 高频段应有较低分贝值和较负的斜率。

  （目的：增强系统的抗干扰能力）

5-5 闭环系统频域性能指标

控制系统闭环传递函数为

$$\Phi(s)=\frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}=\frac{1}{H(s)}\cdot\frac{G(s)H(s)}{1+G(s)H(s)}$$

因H(s)多为常数，故着重讨论单位反馈系统。

$$\Phi(s)=\frac{G(s)}{1+G(s)} \xRightarrow{\text{频率特性}} \Phi(j\omega)=\frac{G(j\omega)}{1+G(j\omega)}$$

一、控制系统的频带宽度

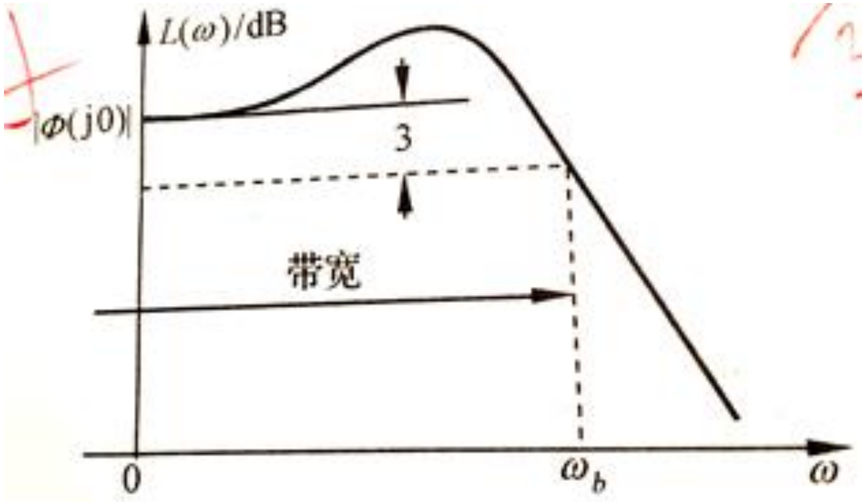


图 5-40 系统带宽频率与带宽

带宽频率 ω_b

$$\text{当}\left|\Phi(j\omega_b)\right| = 0.707\left|\Phi(j0)\right|\text{时}$$

$$\Rightarrow L(\omega_b) = L(0) - 3\text{dB}$$

◆系统带宽：指频率范围（0，ω_b）。

◆带宽定义表明，对于高于带宽频率的正弦输入信号，系统输出将呈现较大的衰减。

◆带宽是频域中非常重要的一个性能指标。对于一阶和二阶系统，带宽和系统参数具有明确的解析关系。

（1）一阶系统

$$\Phi(s)=\frac{1}{Ts+1}$$

$$\left|\Phi(j0)\right|=\frac{1}{\sqrt{(T\cdot 0)^2+1}}=1$$

$$\left|\Phi(j\omega_b)\right|=0.707\left|\Phi(j0)\right|=\frac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow \omega_b=\frac{1}{T}$$

$$t_s = 3T = \frac{3}{\omega_b}$$

一阶系统调节时间与带宽 ω_b成反比。

（2）二阶系统 $\Phi(s) = \dfrac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$

$$|\Phi(j0)| = 1$$

由 $|\Phi(j\omega_b)| = 0.707|\Phi(j0)| \Rightarrow \omega_b = \omega_n\sqrt{(1-2\zeta^2)+\sqrt{(1-2\zeta^2)^2+1}}$

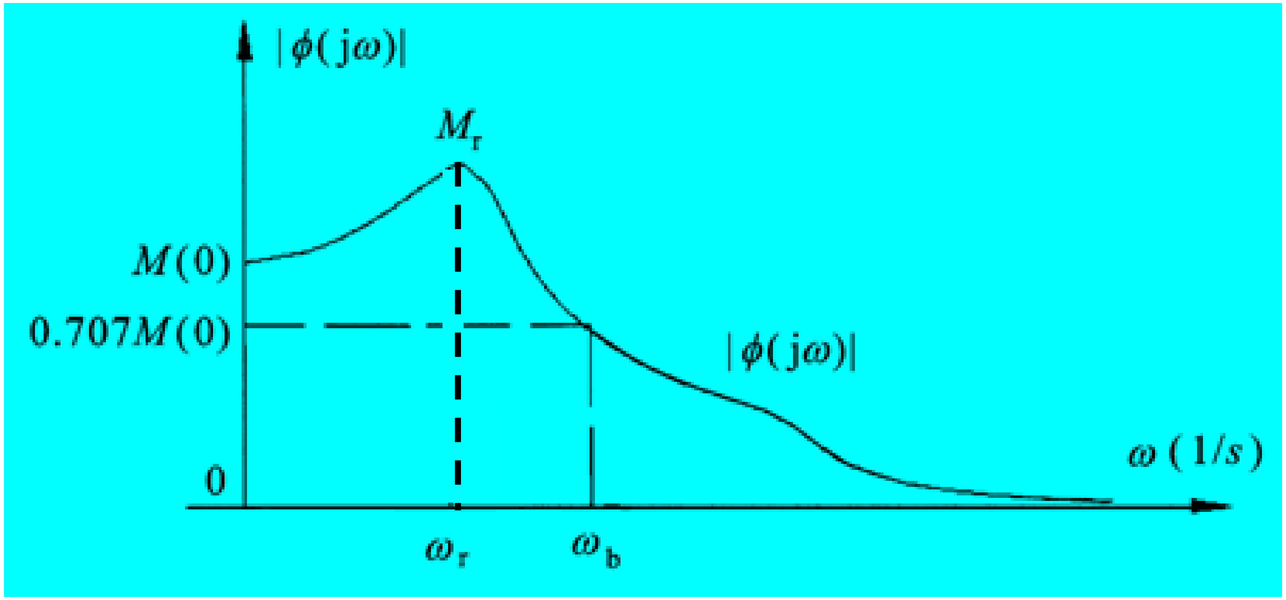
ω_b是ω_n的增函数，是ζ的减函数。且由理论推导可知，系统的单位阶跃响应的速度和带宽成正比。这一结论对任意阶次的系统均成立。

P202最下面

P203 中间“2. 系统带宽选择”的上一段：

当系统的带宽扩大γ倍，系统的响应速度则加快γ倍。鉴于系统复现输入信号的能力取决于系统的幅频特性和相频特性，对于输入端信号，带宽大，则跟踪控制信号的能力强；而在另一方面，抑制输入端高频扰动的能力则弱，因此，系统带宽的选择在设计中应折中考虑，不能一味求大。

3. 闭环频域指标和时域指标间的转换



闭环频率性能指标：

谐振峰值M_r, 峰值频率ω_r，和带宽频率ω_b。

（1）系统闭环和开环频域指标的关系

闭环频域指标：M_r、ω_r和ω_b。　开环频域指标：γ和ω_c。

如果两个系统稳定程度相仿，则ω_c大的系统，ω_b也大；ω_c小的系统，ω_b也小。因此，ω_c和系统响应速度存在正比关系，ω_c可用来衡量系统的响应速度。

谐振峰值 M_r 和相角裕度γ都能表征系统的稳定程度，二者有如下的近似关系：

$$M_r \approx \frac{1}{|\sin\gamma|}$$

（2）开环频域指标和时域指标的关系

开环频域指标：γ和ω$_c$。时域指标：t_s和σ%。

二阶系统 $$\Phi(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$

$$\omega_c=\omega_n\sqrt{\sqrt{4\zeta^4+1}-2\zeta^2}$$

$$\gamma=tg^{-1}\frac{2\zeta}{\sqrt{\sqrt{4\zeta^4+1}-2\zeta^2}}$$

$$t_s=\frac{3.5}{\zeta\omega_n}$$

上面三式联立得 $\Rightarrow \boxed{t_s\omega_c=\frac{7}{tg\gamma}}$

其中γ是ζ的增函数。

为了使系统具有良好的动态特性，一般希望：

30°≤γ≤60°

上面三式联立得 $\Rightarrow \boxed{t_s\omega_c = \dfrac{7}{tg\gamma}}$

γ一定时，ω_c越大，调节时间t_s越小，系统响应速度越快。

对于高阶系统，常用$L_a(\omega)=0 \rightarrow \omega_c \rightarrow \gamma$近似求解。

对于高阶系统，其开环频域性能指标和时域指标之间不存在解析关系式。

作业

- *5-17* （把题目中的*5-8*换成*5-9*（*b*））